فصل ۷
خواص توابع

در بین تمام توابع، خواص مشابهی دیده می شود و لذا طبقه بندی آنها با بررسی خواص تحلیلی شان، همواره به شناخت و تعامل بین آنها کمک کرده و علاوه بر این، نمودار هندسی شان نیز برخی از این خاصیت ها را آشکار می سازد. در این فصل خواص عمومی توابع منجمله توابع مثلثاتی را بیان نموده و ویژگیهای مهم آنها را بررسی خواهیم نمود.

۱.۷ نمودارها و انتقالات

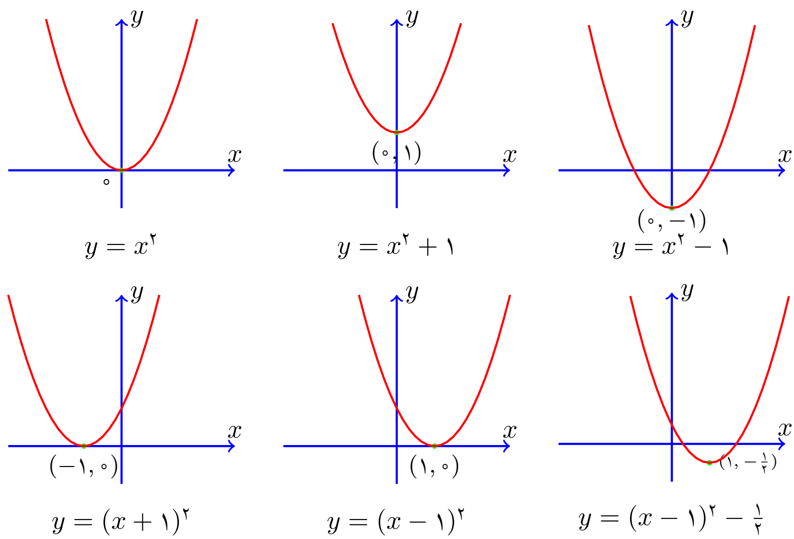
نمودار یک تابع $y = f(x)$ مجموعه نقاطی از صفحه است که توسط زوج مرتبهای $(x, f(x))$ مشخص می شوند. بعبارتی نمودار تابع شکلی هندسی است که از رسم همهٔ نقاط $(x, f(x))$ در صفحه پدید می آید. از خصوصیات نمودار یک تابع آنست که هر خط قائم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می کند. در غیر توابع، این شرط برقرار نیست و خط قائم ممکن است یک شکل یا نمودار را در چند نقطه قطع نماید.

ابتدائی ترین روش رسم نمودار روش نقطه یابی است که کارائی بالائی دارد. اما رسم نمودار با نقطه یابی ممکن است دارای اشتباهاتی شود، بنابراین با در نظر گرفتن ویژگیهای رفتاری و خصلتهای تابع می توان آنرا بهتر و دقیقتر رسم نمود. آگاهی از خصوصیات تابع نظیر دامنه، برد، تناوب، زوج و فرد بودن تابع، تقارن و دیگر ویژگی های آن کمک شایانی به شناخت نمودار تابع و رفتار آن دارد.

با فرض تابعی مانند $y = f(x)$ و آگاهی از نمودار آن در صفحهٔ مختصات، می توان انتقال آنرا بر حسب تغییرات x و y چنین بیان نمود:

- نمودار تابع $y = f(x + a)$ انتقال نمودار f به اندازهٔ a است بموازات محور عرضها، اگر $a > ۰$ بسمت چپ و اگر $a < ۰$ بسمت راست.
- نمودار تابع $y = f(x) + b$ انتقال نمودار f به اندازهٔ b است بموازات محور طولها، اگر $b > ۰$ بسمت بالا و اگر $b < ۰$ بسمت پائین.
- نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینهٔ نمودار f نسبت به محور عرضهاست.
- نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینهٔ نمودار f نسبت به محور طولهاست.
- برای نمودار تابع $y = |f(x)|$ کافیست آنچه از نمودار f در قسمت پائین محور $x-$ها قرار می گیرد، قرینه شده و بطرف بالای محور منتقل شود.

در شکل۱.۷ نمودار $y = x^۲$ را در نظر گرفته و نمودار $y = (x - ۲)^۲$ انتقال بموازات محور عرضها و به اندازهٔ ۲ بطرف راست است. نمودار $y = (x + ۳)^۲$ تغییر بموازات محور عرضها، به اندازه ۳ بطرف چپ می باشد. نمودار

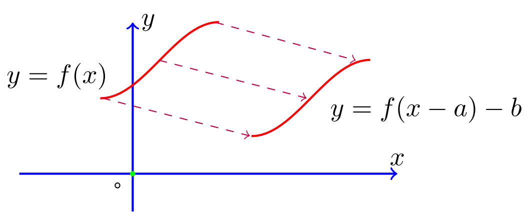


شکل ۱.۷: انتقال در نمودار سهمی $y = x^2$

$y = x^2 + 1$ انتقال نمودار به اندازهٔ ۱+ است که به سمت بالا حرکت کرده و $y = x^2 - 2$ جابجائی نمودار به اندازهٔ ۲- در جهت پائین است.

مطابق پنج بند بالا با انجام تغییراتی که در نمودار $y = f(x)$ در جهت یا حول محورها انجام شده، نمودار توابعی مانند $y + b = f(x+a)$ بدست می آید. در شکل۲.۷ نمودار تابع $y = f(x)$ معلوم است و a و b مثبت و دلخواهند. برای بدست آوردن نمودار تابع $y = f(x-a) - b$ کافی است چند نقطه از نمودار تابع ابتدائی را انتخاب و آنها را به اندازهٔ a در جهت مثبت محور طولها و بطرف راست $(-a < 0)$ و به اندازهٔ b بطرف پائین (چون $-b$ منفی است) حرکت دهیم.

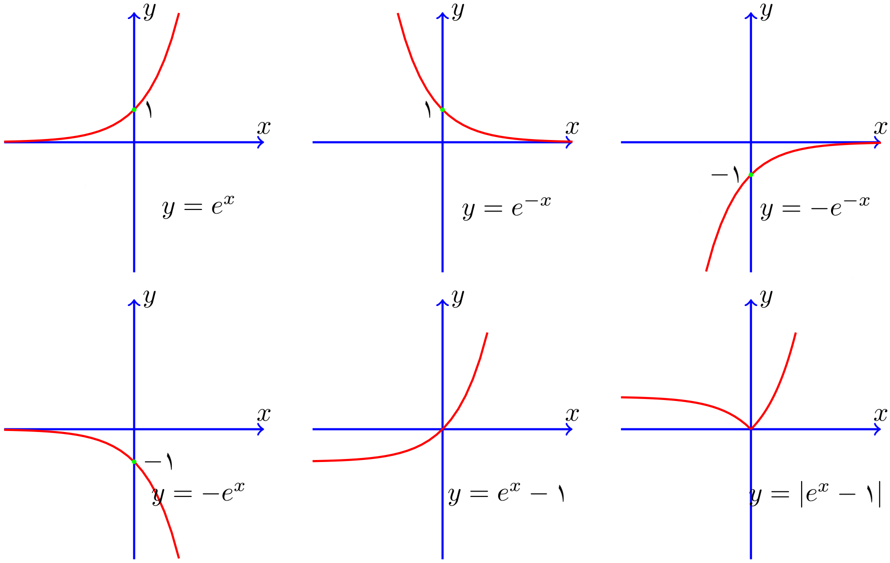
انتخاب مناسب نقاط نمودار اولیه، در دقیق تر یافتن نمودار تابع ثانوی بسیار موثر است.



شکل ۲.۷: انتقال نمودار به اندازه $a > 0$ و $b > 0$

در شکل۳.۷ نمودار $y = e^x$ را در نظر گرفتیم. $y = e^{-x}$ قرینه‌ای نسبت به محور عرضها دارد و نمودار

$y=-e^x$ از قرینهٔ منحنی اصلی حول محور طولها به دست می آید. برای نمودار $y=e^x-۱$ کافیست نمودار اصلی را یک واحد پائین بیاوریم و همین نمودار را در قدرمطلق قرارداده، نمودار $y=|e^x-۱|$ حاصل می شود که برای اینکار قسمت پائینی $y=e^x-۱$ را به بالای محور طولها انتقال داده‌ایم.



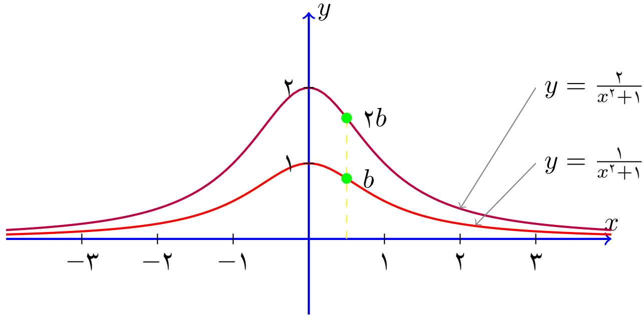
شکل ۳.۷: انتقال نمودار $y=e^x$

مطلب ۷.۱

اگر نمودار تابع $y=f(x)$ موجود باشد برای رسم نمودار تابع $y=cf(x)$ کافیست هر نقطه از نمودار $y=f(x)$ را در عدد c ضرب کنیم. اگر $|c|>۱$ نمودار بازتر می شود و اگر $|c|<۱$ نمودار جمع تر خواهد شد.

شکل ۴.۷ نمودار دو تابع را نشان می دهد، یکی تابع $y=\frac{۱}{x^۲+۱}$ در پائین و دیگری نمودار تابع $y=\frac{۲}{x^۲+۱}$ که در بالاتر قرار گرفته است. ضابطهٔ دو تابع نشان می دهد که هر نقطه از نمودار $y=\frac{۲}{x^۲+۱}$ عرضی دو برابر همان نقطه در نمودار $y=\frac{۱}{x^۲+۱}$ دارد. پس برای هر نقطهٔ $(x,۲b)$ کافی است عرض هر نقطهٔ (x,b) را دو برابر کرده و نقطهٔ نمودار دوم را بیابیم.

تمرین ۲.۷. .



شکل ۴.۷: عرض هر نقطه از نمودار بالاتر دو برابر عرض نمودار پائینی است.

۱. با استفاده از روش نقطه یابی نمودار تابع درجه سه $y = x^۳$ را رسم کرده و سپس نمودارهای زیر را با استفاده از آن رسم کنید.

$$y=(x+۲)^۳ \ , \ y=x^۳+۲ \ , \ y=x^۳-۱ \ , \ y=(x+۱)^۳+۱ \ , \ y=(x-۲)^۳+۲$$

۲. نمودار سهمی $y = x^۲$ را رسم کرده و با استفاده از آن نمودار توابع زیر را بیابید.

$$y=۲x^۲ \ , \ y=\frac{۱}{۲}x^۲ \ , \ y=۳x^۲-۱ \ , \ y=۲(x+۱)^۲+۱ \ , \ y=(۲x)^۲$$

۳.۷ ترکیب توابع

می توان گفت اکثر توابع ریاضی توابعی ترکیبی اند که از ترکیب دو یا چند تابع ساده حاصل می شوند. در ترکیب توابع، دامنه و برد تغییر نموده و دامنه و برد تابع حاصل، ترکیبی متفاوت از دامنه و برد توابع اولیه می باشد. مثلاً از ترکیب دو تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin x$ دو تابع $\sqrt{\sin x}$ و $\sin\sqrt{x}$ حاصل می گردد که کاملاً با توابع نخستین متفاوتند. ترکیب دو تابع و دامنهٔ حاصل بصورت زیر تعریف می شود.
توابع $f : A \to \mathbb{R}$ و $g : B \to A$ مفروضند. ترکیب تابع f با g که با نماد fog نمایش داده می شود بصورت $fog(x) = f(g(x))$ تعریف شده و دامنهٔ آن عبارتست از

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$$

مثال ۱.۳.۷. برای توابع $f(x) = \frac{۱}{x^۲-۱}$ و $g(x) = \sqrt{x+۱}$ تابع gof و دامنهٔ آن D_{gof} را حساب کنید.
حل. طبق تعریف ترکیب توابع می نویسیم:

$$gof(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{۱}{x^۲-۱}\right) = \sqrt{\left(\frac{۱}{x^۲-۱}\right)+۱}$$

و از آنجاکه $D_f = \mathbb{R} - \{-۱, ۱\}$ و $D_g = [-۱, +\infty)$ است داریم:

$$\begin{aligned} D_{gof} &= \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{-۱, ۱\} \Big| \frac{۱}{x^۲ - ۱} \geqslant -۱\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{-۱, ۱\} \Big| \frac{x^۲}{x^۲ - ۱} \geqslant ۰\} \\ &= (-\infty, -۱) \cup (۱, +\infty) \end{aligned}$$

و یا بعبارتی دیگر $D_{gof} = [-۱, ۱]^c$. ■

مطلب ۷.۲: ترکیب توابع چند ضابطه‌ای

ترکیب دو تابع چند ضابطه‌ای نیز، روی دامنه مشترکشان قابل تعریف است. مثلاً برای توابع

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ & , \quad x \geqslant ۱ \text{ اگر} \\ ۲x & , \quad x < ۱ \text{ اگر} \end{cases}$$

و

$$g(x) = \begin{cases} ۲x^۳ + ۱ & , \quad x \geqslant ۰ \text{ اگر} \\ ۴x + ۱ & , \quad -۱ \leqslant x < ۰ \text{ اگر} \\ -۱ - ۲x & , \quad x < -۱ \text{ اگر} \end{cases}$$

ترکیب fog بصورت زیر است:

$$fog(x) = \begin{cases} (۲x^۳ + ۱)^۲ - ۱ & , \quad x \geqslant ۰ \text{ اگر} \\ ۲(۴x + ۱) & , \quad -۱ \leqslant x < ۰ \text{ اگر} \\ (-۱ - ۲x)^۲ - ۱ & , \quad x < -۱ \text{ اگر} \end{cases}$$

مثال ۲.۳.۷. آیا برای توابع $f(x) = e^x$ و $g(x) = \ln x$ ترکیبات fog و gof برابرند.

حل. طبق تعریف ترکیب توابع می نویسیم:

$$\begin{aligned} fog(x) &= f(g(x)) = f(\ln x) = e^{\ln x} = x \\ gof(x) &= g(f(x)) = g(e^x) = \ln(e^x) = x \end{aligned}$$

و بنابراین ضابطهٔ این دو تابع با هم برابر است. برای دامنه هایشان داریم:

$$\begin{aligned} D_{fog} &= \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \in (۰, +\infty) \Big| \ln x \in \mathbb{R}\} = (۰, +\infty) \\ D_{gof} &= \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \Big| e^x > ۰\} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

و بنابراین $D_{fog} \neq D_{gof}$ و توابع ترکیبی fog و gof با هم برابر نیستند. ■

تمرین ۴.۷. .

۱. اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x-۵}$ و $g(x)=۲\sqrt{x}-۱$ مقادیر gof و D_{gof} را حساب کنید.

۲. اگر $g(x)=\frac{x}{x+۴}$ و $f(x)=\sqrt{x^۲-۱}$ مقادیر fog و D_{fog} را حساب کنید.

۳. آیا برای توابع $f(x)=\frac{x-۱}{x+۲}$ و $g(x)=\frac{۱+۲x}{۱-x}$ ترکیبات fog و gof برابرند.

۴. ترکیب fog و gof دو تابع چند ضابطه‌ای زیر را بنویسید.

$$f(x)=\begin{cases} x+۳ & , \quad x\geqslant -۱ \text{ اگر} \\ x^۲-۴ & , \quad x<-۱ \text{ اگر} \end{cases}$$

و

$$g(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & , \quad x\geqslant ۱ \text{ اگر} \\ -x-۱ & , \quad ۰\leqslant x<۱ \text{ اگر} \\ x^۲-۱ & , \quad x<۰ \text{ اگر} \end{cases}$$

۵.۷ خواص توابع

اکنون خواصی را که برخی توابع دارا بوده را بررسی کرده و این طریقهٔ آگاهی، روی عناصر ریاضی متداول است. علاوه بر این با استفاده از خواص توابع، نمودار هندسی شان را نیز بهتر خواهیم شناخت.

۱.۵.۷ توابع صعودی و نزولی

تابع f را صعودی گوئیم اگر $x_۱\leqslant x_۲$ نتیجه دهد که $f(x_۱)\leqslant f(x_۲)$، تابع f را نزولی گوئیم اگر $x_۱\leqslant x_۲$ نتیجه دهد که $f(x_۱)\geqslant f(x_۲)$. واضح است که $x_۱$ و $x_۲$ هر دو می بایست در دامنه تابع f باشند.

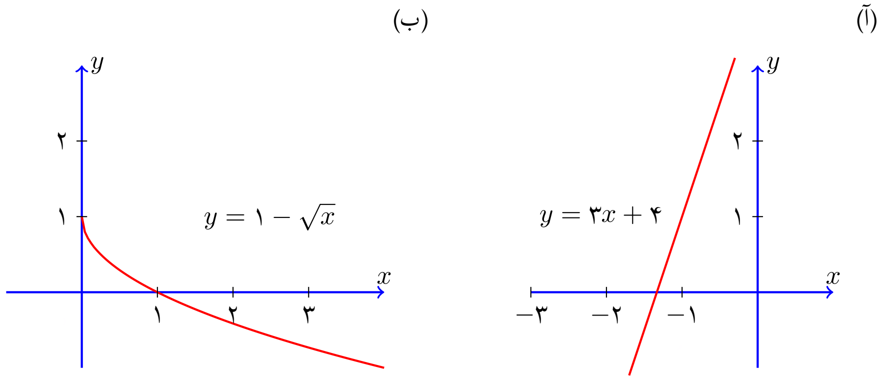
مثال ۱.۵.۷. تابع $f(x)=۳x+۴$ صعودی است زیرا

$$x_۱\leqslant x_۲\Rightarrow ۳x_۱\leqslant ۳x_۲\Rightarrow ۳x_۱+۴\leqslant ۳x_۲+۴\Rightarrow f(x_۱)\leqslant f(x_۲)$$

در واقع هر خط با شیب مثبت، صعودی و با شیب منفی نزولی است. ■

مثال ۲.۵.۷. صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)=۱-\sqrt{x}$ را مشخص نمائید.
حل. این تابع نزولی است زیرا روی اعداد مثبت داریم:

$$\begin{aligned} x_۱ &\leqslant x_۲ \\ \sqrt{x_۱} &\leqslant \sqrt{x_۲} \\ -\sqrt{x_۱} &\geqslant -\sqrt{x_۲} \\ ۱-\sqrt{x_۱} &\geqslant ۱-\sqrt{x_۲} \\ f(x_۱) &\geqslant f(x_۲) \end{aligned}$$



شکل ۵.۷: نمودار تابع صعودی مثال ۱.۵.۷ و تابع نزولی مثال ۲.۵.۷

■

در حالت کلی یک تابع می تواند در برخی فواصل صعودی و در برخی فواصل نزولی باشد ولی تابعی که فقط صعودی و یا فقط نزولی است را تابع یکنوا گوئیم.

۲.۵.۷ تابع زوج و فرد

تابع f را زوج گوئیم اگر دارای دو شرط زیر باشد.
۱) برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $-x \in D_f$
۲) $f(-x) = f(x)$
تابع f را فرد گوئیم اگر دارای دو شرط زیر باشد
۱) برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $-x \in D_f$
۲) $f(-x) = -f(x)$

مثال ۳.۵.۷. تابع $g(x) = -۳x^۲ + ۹$ تابعی زوج است زیرا

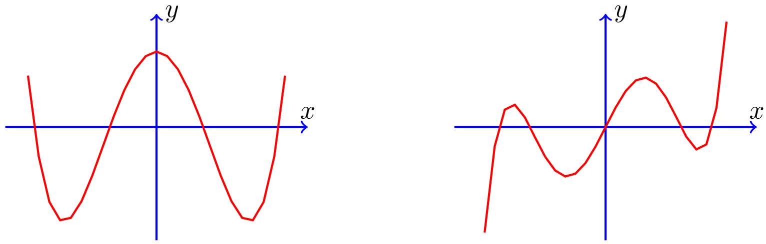
$$g(-x) = -۳(-x)^۲ + ۹ = -۳x^۲ + ۹ = g(x)$$

و تابع $h(x) = ۵x^۳ - x$ تابعی فرد است چون

$$h(-x) = ۵(-x)^۳ - (-x) = -۵x^۳ + x = -(۵x^۳ - x) = -h(x)$$

عموماً توابع چندجمله‌ای که توان زوج دارند یا عددند توابعی زوج و آنها که توانهایی فرد دارند توابعی فردند. بنابراین تابع $f(x) = x^۳ - ۲x^۲ + ۶x + ۷$ نه زوج است نه فرد، زیرا هم دارای توانهای زوج است و هم دارای توانهای فرد. توابع $\sin x$، $\tan x$، $\cot x$ و $\sinh x$ توابعی فرد و توابع $\cos x$ و $\cosh x$ توابعی زوج است. از نظر نموداری

(آ) (ب)



شکل ۶.۷: نمودار تابع فرد (راست) و زوج (چپ) که تقارن را تداعی می کنند.

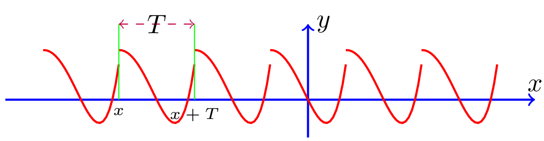
تابع زوج نسبت به محور عرضها متقارن و تابع فرد نسبت به مبداء مختصات متقارن است. براحتی می توان خیلی از نمودارها را رسم نمود که نه نسبت به محور عرضها متقارن باشند و نه نسبت به مبداء مختصات و این نشان می دهد که خیلی از توابع نه زوجند و نه فرد.

تمرین ۶.۷. زوج و فرد بودن توابع زیر را مشخص کنید.

$$f(x) = x^۴ - ۵x^۲ + ۱ \quad , \quad g(x) = ۳\sin ۴x + ۳x^۳ + ۲x \quad , \quad h(x) = \frac{x^۲ - ۱}{x^۲ + ۱}$$
$$i(x) = ۳\sqrt{x} + ۲ \quad , \quad j(x) = \frac{e^x - ۱}{e^x + ۱} \quad , \quad k(x) = |x| + ۱$$

۱.۶.۷ تابع متناوب

تابع حقیقی f را متناوب با دورهٔ تناوب T گوئیم اگر $f(x+T) = f(x)$. اینگونه توابع در هر فاصله مرتباً تکرار می شوند و بنابراین می توان آنها را در همان فاصلهٔ تناوبشان بررسی نمود.



شکل ۷.۷: نمودار تابعی متناوب که در فاصله‌ای خاص تکرار می شود.

مثال ۱.۶.۷. تابع $f(x) = ۳\sin x$ تابعی متناوب با دوره تناوب $T = ۲\pi$ است زیرا

$$f(x + ۲\pi) = ۳\sin(x + ۲\pi) = ۳\sin x = f(x)$$

توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ توابعی متناوب با دوره تناوب ۲π و توابع $y=\tan x$ و $y=\cot x$ توابعی متناوب با دوره تناوب π هستند (بخش۸.۷).

مثال ۲.۶.۷. تابع $g(x)=x-[x]+۲$ تابعی متناوب با دوره تناوب $T=۱$ است زیرا

$$g(x+۱)=(x+۱)-[x+۱]+۲=x+۱-[x]-۱+۲=x-[x]+۲=g(x)$$

مثال ۳.۶.۷. مطلوبست تعیین دوره تناوب تابع $y=۳x-[۳x]$.

حل. با فرض دوره تناوب مثبتی مانند T طبق تعریف تناوب داریم:

$$\begin{aligned} ۳(x+T)-[۳(x+T)] &= ۳x-[۳x] \\ ۳T-[۳x+۳T] &= -[۳x] \\ [۳x+۳T]-[۳x] &= ۳T\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

برای کوچکترین تناوب $۳T=۱$ (کوچکترین عدد طبیعی) بوده پس $T=\frac{۱}{۳}$ تناوب تابع است. ■

۲.۶.۷ تابع کراندار

تابع f را از بالا کراندار نامیم هرگاه مقادیر آن از عددی مانند M کمتر باشند $f(x)\leqslant M$. همچنین تابع f را از پائین کراندار گوئیم اگر مقادیر این تابع از عددی مانند N بیشتر باشند $f(x)\geqslant N$. تابع f کراندار است اگر $N\leqslant f(x)\leqslant M$ که M و N اعدادی حقیقی‌اند.

مثال ۴.۶.۷. تابع $y=\frac{۱}{۱+x^۲}$ تابعی کراندار است زیرا صورت و مخرجش مثبت بوده و نیز از $x^۲\geqslant ۰$ داریم $۱+x^۲\geqslant ۱$ و $\frac{۱}{۱+x^۲}\leqslant ۱$ یعنی تابع همیشه بین ۰ و ۱ قرار می گیرد و $۱\geqslant\frac{۱}{۱+x^۲}>۰$. نمودار تابع مطابق شکل۸.۷ (ب) است.

مثال ۵.۶.۷. سهمی $y=x^۲-۱$ از پائین کراندار بوده ($x^۲-۱\geqslant -۱$) ولی از بالا کراندار نیست (شکل۸.۷ آ).

۳.۶.۷ تقارن

همچنانکه دیدیم تابع زوج نسبت به محور عرضها متقارن بوده و تابع فرد نسبت به مبداء مختصات متقارن است. اینگونه تقارن ها در نمودار توابع و یا بطورکلی اشکال، به شناخت کلی تابع بهتر کمک کرده و خواص ویژه‌ای را در آنها آشکار می کند.

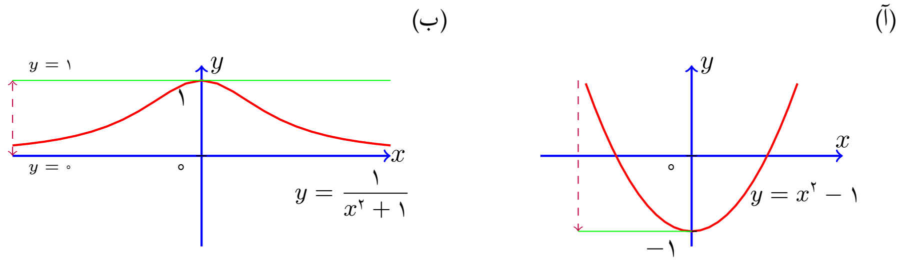
دو نقطهٔ $A(x,y)$ و $A'(x',y')$ را نسبت به نقطهٔ $M(\alpha,\beta)$ متقارن گوئیم اگر M وسط پاره‌خط AA' باشد یعنی

$$\alpha=\frac{x+x'}{۲}\ ,\ \ \beta=\frac{y+y'}{۲}$$

یا

$$x'=۲\alpha-x\ ,\ \ y'=۲\beta-y$$

بدین ترتیب برای بدست آوردن A'، قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به $M(\alpha,\beta)$، کافیست بجای x قرار دهیم $۲\alpha-x$ و بجای y قرار دهیم $۲\beta-y$. تقارن حول یک نقطه را تقارن مرکزی گوئیم.



شکل ۸.۷: توابع کراندار

مثال ۶.۶.۷. نقاط $A(1,3)$ و $B(7,1)$ نسبت به نقطهٔ $C(4,2)$ متقارنند زیرا

$$4=\frac{1+7}{2}\quad,\quad 2=\frac{3+1}{2}$$

مثال ۷.۶.۷. قرینهٔ نقطهٔ $A(3,5)$ نسبت به نقطهٔ $M(4,-2)$ چیست؟

$$x'=2(4)-3=5\ ,\ \ y'=2(-2)-5=-9\Longrightarrow A'(5,-9)$$

فرمول تقارن حول یک نقطه، برای نقاط واقع بر نمودار یک تابع نیز برقرار است بدین ترتیب که قرینهٔ تابع $f(x,y)=0$ نسبت به $M(\alpha,\beta)$ عبارتست از $f(2\alpha-x,2\beta-y)=0$. قرینهٔ تابع صریح $y=f(x)$ نسبت به $M(\alpha,\beta)$ نیز عبارت از $2\beta-y=f(2\alpha-x)$ است.

مثال ۸.۶.۷. قرینهٔ تابع $y=3x^3-5x+2$ را نسبت به نقطهٔ $(-1,2)$ بیابید.
حل. بجای x مقدار $-2-x$ و بجای y نیز عبارت $4-y$ را جایگزین می کنیم پس داریم:

$$\begin{aligned}4-y&=3(-2-x)^3-5(-2-x)+2\\4-y&=3(-8-12x-6x^2-x^3)+10+5x+2\\y&=3x^3+18x^2+31x+16\end{aligned}$$

■

تابع $f(x,y)=0$ را نسبت به نقطهٔ $M(\alpha,\beta)$ متقارن گوئیم اگر $f(2\alpha-x,2\beta-y)\equiv f(x,y)$. همچنین تابع $y=f(x)$ را نسبت به نقطهٔ $M(\alpha,\beta)$ متقارن گوئیم اگر $f(2\alpha-x)\equiv 2\beta-f(x)$. در این حالت نقطهٔ M را مرکز تقارن تابع $f(x,y)=0$ نامیم.

مثال ۹.۶.۷. مرکز تقارن تابع $y=x^3-27x+3$ را پیدا کنید.
حل.

$$\begin{aligned}2\beta-f(x)&\equiv f(2\alpha-x)\\2\beta-(x^3-27x+3)&\equiv(2\alpha-x)^3-27(2\alpha-x)+3\\-x^3+27x-3+2\beta&\equiv -x^3+6\alpha x^2+(27-12\alpha^2)x+8\alpha^3-54\alpha+3\end{aligned}$$

با تساوی ضرایب طرفین داریم $\alpha = ۰$ و $\beta = ۳$ و نقطهٔ $M(۰, ۳)$ مرکز تقارن تابع است. ■

مطلب ۷.۳

با استفاده از مطالب بالا تقارن مرکزی حول یک نقطهٔ $M(\alpha, \beta)$ بصورت زیر بیان می شود:

- قرینهٔ نقطهٔ $A(x, y)$ نسبت به محور $x-$ها عبارتست از $A(x, -y)$.
- قرینهٔ نقطهٔ $A(x, y)$ نسبت به محور $y-$ها عبارتست از $A(-x, y)$.
- قرینهٔ نقطهٔ $A(x, y)$ نسبت به مبداء مختصات عبارتست از $A(-x, -y)$.
- گوئیم منحنی $f(x, y) = ۰$ نسبت به محور $y-$ها متقارن است اگر $f(-x, y) = ۰$. بعبارتی اگر x را با $-x$ در معادله عوض کنیم تغییری در معادله حاصل نشود. در این حالت گوئیم تابع زوج است.
- گوئیم منحنی $f(x, y) = ۰$ نسبت به محور $x-$ها متقارن است اگر $f(x, -y) = ۰$. یعنی وقتی y را با $-y$ در معادله عوض می کنیم تغییری در معادله حاصل نشود. این منحنی، نمودار یک تابع نخواهد بود.
- گوئیم منحنی $f(x, y) = ۰$ نسبت به مبداء مختصات متقارن است اگر $f(-x, -y) = ۰$. پس اگر x را با $-x$ و y را با $-y$ در معادله عوض کنیم تغییری در معادله حاصل نخواهد شد. در این حالت گوئیم تابع فرد است.

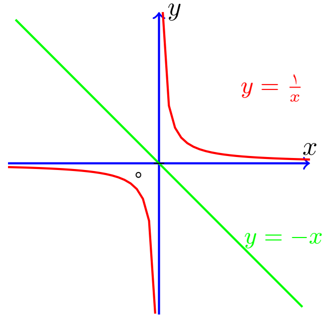
مثال ۱۰.۶.۷. نشان دهید نمودار تابع $xy = ۱$ نسبت به مبداء متقارن است.

حل. با تغییر x را با $-x$ و y را با $-y$ در معادله $(-x)(-y) = ۱$ و همان تابع $xy = ۱$ حاصل می شود (شکل ۹.۷). ■

تمرین ۷.۷. .

۱. مرکز تقارن توابع زیر را بیابید.

$$
\begin{array}{llllll}
(a) & y = x^۳ - ۳x^۲ + ۴ & ,\ (b) & ۵x + ۴y = ۲ & ,\ (c) & y = -x^۳ - ۳x^۲ + ۳ \\
(d) & x - ۲xy - ۴y = ۱ & ,\ (e) & y = \dfrac{x - ۲}{x + ۴} & ,\ (f) & ۲xy - x - y + ۱ = ۰ \\
(g) & x + xy = ۳ & ,\ (h) & xy^۳ = ۲ & ,\ (i) & (y - ۲x)(x + y - ۳) = ۱
\end{array}
$$



شکل ۹.۷: نمودار تابع $xy=۱$.

۲. نموداری مثال بزنید که نسبت به هیچ خطی و یا نقطه ای متقارن نباشد.

۳. نشان دهید نمودار تابع $xy=۱$ نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم $(y=-x)$ متقارن می باشد (شکل۹.۷). این نوع تقارن را تقارن محوری نامیم.

۸.۷ توابع مثلثاتی

از آنجا که برای هر زاویهٔ دلخواه می توان مقادیر نسبتهای چهارگانه را بدست آورد، به همین ترتیب می توان بجای مقدار زاویه، متغیری دلخواه مانند x قرار داد. در این حالت نسبت های $\sin x$ و $\cos x$ و $\tan x$ و $\cot x$ برای مقادیر مختلف x، یک مقدار حقیقی خواهند بود و آنها را توابع مثلثاتی نامیم. پس توابع مثلثاتی عبارتند از:

$$y=\sin x \ , \ y=\cos x \ , \ y=\tan x \ , \ y=\cot x$$

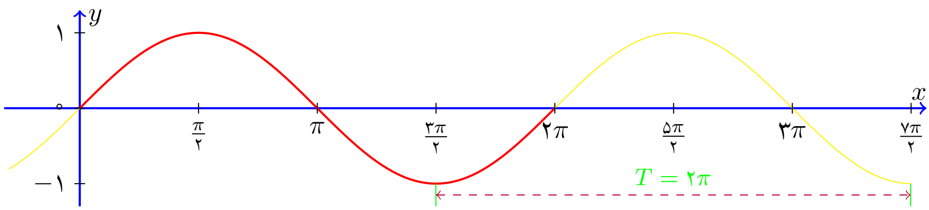
که x متغیری دلخواه بوده و معمولاً برحسب رادیان بیان می شود. همچنین توابع $y=\sec x$ و $y=\csc x$ نیز گاهی قابل استفاده اند. کلیهٔ روابطی که بین نسبتهای مثلثاتی برقرار بود، برای توابع مثلثاتی نیز برقرار می باشد.

۱.۸.۷ تابع $y=\sin x$

دامنهٔ تابع سینوس اعداد حقیقی $D_{\sin}=\mathbb{R}$ و برد آن $R_{\sin}=[-۱,۱]$ است بنابراین کلیهٔ مقادیر حقیقی را می پذیرد ولی مقادیر آن بین ۱ و ۱− قرار می گیرند پس تابعی کراندار است یعنی $-۱\leqslant \sin x\leqslant ۱$. این تابع، متناوب با دورهٔ تناوب $T=۲\pi$ است. با شروع از زاویه صفر و یافتن مقادیری از سینوس در یک دورهٔ تناوب، جدول زیر از مقادیر تابع $y=\sin x$ را تشکیل می دهیم:

x	$\circ$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$۳\frac{\pi}{۴}$	π	$۵\frac{\pi}{۴}$	$۳\frac{\pi}{۲}$	$۷\frac{\pi}{۴}$	۲π
$\sin x$	$\circ$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\circ$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\circ$

که شکل سینوسی زیر را ایجاد کرده و تقارن آن نسبت به مبداء نشان از فرد بودن تابع است. به فراز و نشیب منحنی سینوس در نواحی مختلف کاملا دقت کنید.



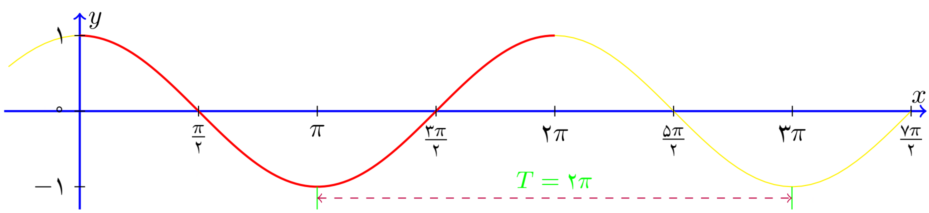
شکل ۱۰.۷: نمودار تابع $y = \sin x$

۲.۸.۷ تابع $y = \cos x$

دامنهٔ تابع کسینوس اعداد حقیقی $D_{\cos} = \mathbb{R}$ و برد آن $R_{\cos} = [-۱, ۱]$ است پس تمامی مقادیر حقیقی را می پذیرد و حاصل آن تنها بین ۱ و ۱- قرار می گیرد، بنابراین تابعی کراندار است یعنی $-۱ \leqslant \cos x \leqslant ۱$. این تابع متناوب با دورهٔ تناوب $T = ۲\pi$ است. با شروع از زاویه صفر و یافتن کسینوس چند زاویه در یک دورهٔ تناوب، جدول زیر از مقادیر تابع $y = \cos x$ را تشکیل می دهیم:

x	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$۳\frac{\pi}{۴}$	π	$۵\frac{\pi}{۴}$	$۳\frac{\pi}{۲}$	$۷\frac{\pi}{۴}$	۲π
$\cos x$	۱	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۰	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۰	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱

که شکل کسینوسی زیر را ایجاد کرده و تقارن آن نسبت به محور عرضها نشاندهندهٔ زوج بودن تابع است.



شکل ۱۱.۷: نمودار تابع $y = \cos x$

۳.۸.۷ تابع $y = \tan x$

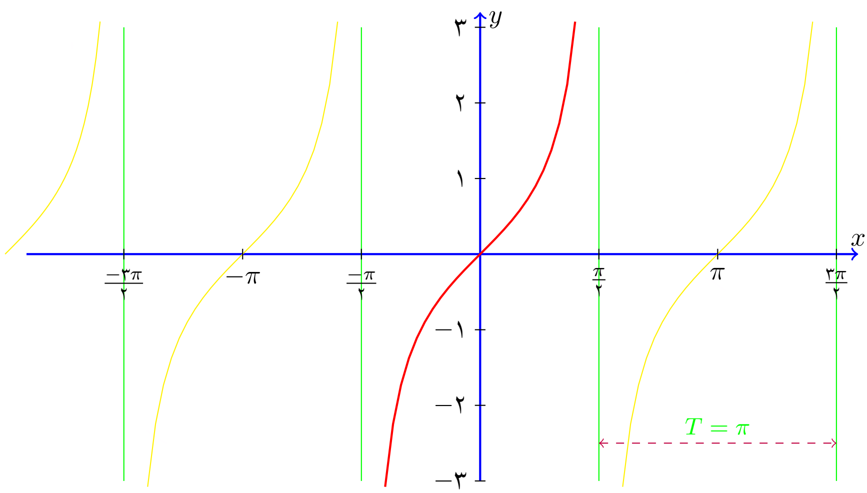
تابع تانژانت بخودی خود تابع مستقلی نیست و بشکل خارج قسمت $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ تعریف می شود که دامنهٔ آن عبارتست از $D_{\tan} = \mathbb{R} - \left\{(۲k+۱)\frac{\pi}{۲} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$ یعنی اعداد حقیقی بجز اعدادی که مخرج تابع را صفر می کنند. برد این تابع تمام اعداد حقیقی $R_{\tan} = \mathbb{R}$ است پس کلیهٔ مقادیر حقیقی را بدست می دهد:

$$-\infty \leqslant \tan x \leqslant \infty$$

این تابع مثلثاتی متناوب با دورهٔ تناوب $T = \pi$ است و برای رسم نمودار آن با شروع از زاویه صفر و یافتن مقادیری از آن در یک دورهٔ تناوب $[\circ, \pi]$، جدول زیر از مقادیر تابع را تشکیل می‌دهیم:

x	$\circ$	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π
$\tan x$	$\circ$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	$+\infty \mid -\infty$	$-\sqrt{۳}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\circ$

که شکل زیر را نشان داده و تقارن آن نسبت به مبداء نشان از فرد بودن تابع است.



شکل ۱۲.۷: نمودار تابع $y = \tan x$

در یک تناوب، تانژانت صعودی است و اگر $-\frac{\pi}{۲} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{۲}$ سپس $\tan\alpha < \tan\beta$ خواهد بود.

۴.۸.۷ تابع $y = \cot x$

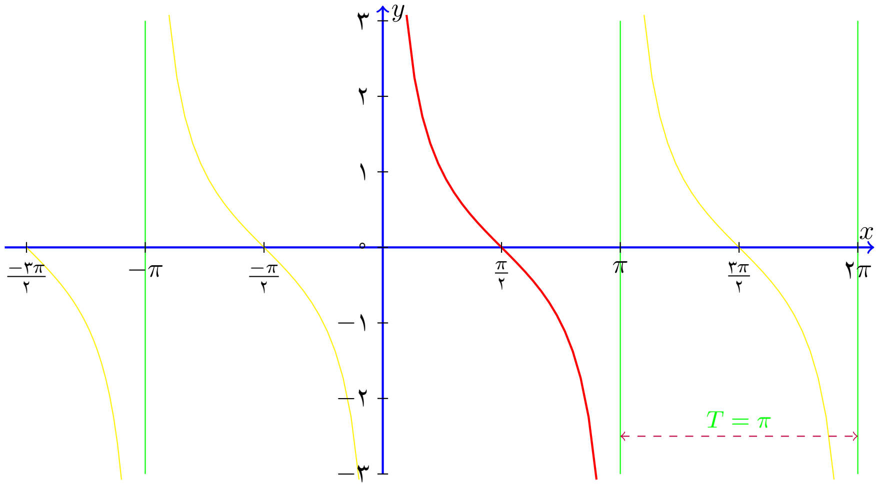
تابع کتانژانت با ضابطهٔ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ تعریف شده و دامنه اش $D_{\cot} = \mathbb{R} - \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ است یعنی اعداد حقیقی بجز ضرایب صحیح π. برد تابع تمام اعداد حقیقی است. $R_{\cot} = \mathbb{R}$

$$-\infty \leqslant \cot x \leqslant \infty$$

تابع کتانژانت متناوب با دورهٔ تناوب $T = \pi$ است و برای رسم نمودار آن، با شروع از زاویه صفر و با یافتن مقادیر تابع در یک دورهٔ تناوب، جدول زیر را تشکیل می دهیم:

x	$\circ$	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π
$\cot x$	$+\infty$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\circ$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	-۱	$-\sqrt{۳}$	$-\infty$

نمودار حاصل نسبت به مبداء متقارن بوده و نشان می دهد که $y = \cot x$ تابعی فرد است. در یک تناوب کتانژانت



شکل ۱۳.۷: نمودار تابع $y = \cot x$

نزولی است و اگر $0 < \alpha < \beta < \pi$ سپس $\cot\alpha > \cot\beta$.

تمرین ۹.۷. .

۱. دوره تناوب توابع $y = \sin ax$، $y = \cos ax$، $y = \tan ax$ و $y = \cot ax$ که a عددی حقیقی دلخواهی است چیست؟

۲. تابع $y = \sin 2x$ را در یک دوره تناوبش رسم کنید.

۳. با استفاده از نمودار توابع مثلثاتی (اشکال ۱۰.۷ تا ۱۳.۷) نمودار توابع زیر را رسم نمائید.

$$\begin{array}{llll}
(a) & f(x) = 2\sin x & , (b) & f(x) = |\sin x| \\
(c) & f(x) = 2|\cos x| & , (d) & f(x) = |\tan x| + 1 \\
(e) & f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3}) & , (f) & f(x) = 2\sin x + \cos x \\
(g) & f(x) = \sin(x + \pi) & , (h) & f(x) = -|\cot x| + 1
\end{array}$$

۴. با رسم دقیقی از توابع $y = \sin x$ و $y = 2\cos x$ در فاصلهٔ $[0, \frac{\pi}{2}]$ ریشه های معادلهٔ $\sin x = 2\cos x$ را بیابید.

۱۰.۷ وارون یک تابع

آنچه تحت عنوان وارون یا معکوس یک تابع بیان می شود، تابعی است که ترکیب آن با تابع اصلی برابر تابع همانی خواهد شد. از نظر نمودار، اگر تصویر نقاط نمودار تابعی را نسبت به خط $y = x$ بدست آوریم نموداری که حاصل می شود لزوماً تابع نیست. اما تحت شرایطی، نمودار معکوس شده تابع بوده و آنرا تابع معکوس یا تابع وارون نامیم. در ادامه به جزئیات موضوع می‌پردازیم.

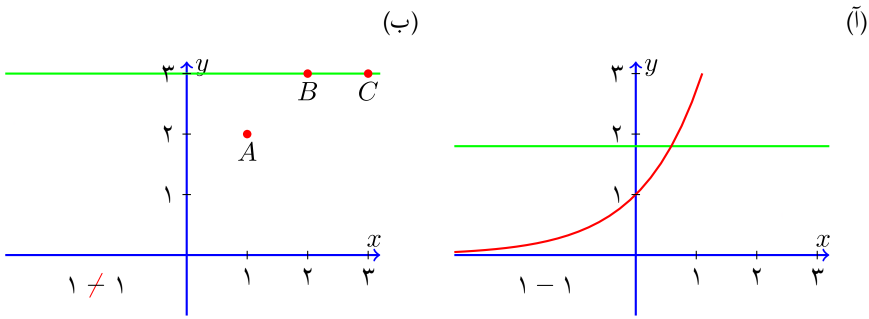
۱.۱۰.۷ تابع یک به یک

تابع $f : A \to B$ را یک به یک (۱-۱) گوئیم اگر بازای هر $x_۱$ و $x_۲$ در A که $f(x_۱) = f(x_۲)$ باشد نتیجه بگیریم که $x_۱ = x_۲$.

از این تعریف بر می آید که تابعی ۱-۱ است که هیچ دو زوج مرتب متفاوت، با مولفه های دوم یکسان نداشته باشد برای مثال تابع

$$f = \{(۱, ۲), (۲, ۳), (۳, ۳)\}$$

تابعی ۱-۱ نیست زیرا دارای دو زوج مرتب با مولفه های دوم یکسان است. چنین تابعی غیر یک به یکی نموداری ملموس دارد از آن جهت که هر خط موازی محور طول ها آن را در بیش از یک نقطه قطع خواهد نمود. نمودارهای شکل۸.۷ هر دو توابعی غیر ۱-۱ هستند زیرا هر خط موازی محور طولها، آنها در دو نقطه قطع می کند. نمودار تابع سه نقطه‌ای f در فوق و تابع یک به یک $y = e^x$ در شکل۱۴.۷ آمده است.



شکل ۱۴.۷: توابع ۱-۱ از لحاظ نمودار

می توان گفت تابعی که بر بازه‌ای یکنوا باشد در آن بازه یک به یک است.

مثال ۱.۱۰.۷. نشان دهید تابع $f(x)=\frac{۱}{x+۲}$ یک به یک است.

حل. با استفاده از تعریف می نویسیم:

$$\begin{aligned} f(x_۱) &= f(x_۲)\\ \frac{۱}{x_۱+۲} &= \frac{۱}{x_۲+۲}\\ x_۱+۲ &= x_۲+۲\\ x_۱ &= x_۲ \end{aligned}$$

که یک به یک بودن تابع را نشان می دهد. این تابع یکنواست. ■

۲.۱۰.۷ تابع وارون (معکوس)

تابع یک به یک $f:A\to B$ را در نظر می‌گیریم. گوئیم تابعی مانند $g:B\to A$ تابع وارون f است اگر

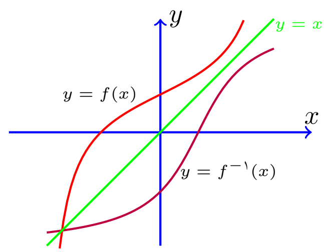
$$fog(y)=y\ ,\ \ y\in D_g$$
$$gof(x)=x\ ,\ \ x\in D_f$$

تابع وارون تابع f را با $f^{-۱}$ نشان می دهیم. برای مثال توابع $f(x)=\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=x^۲-۱$ وارون یکدیگرند زیرا برای $x+۱\geqslant ۰$

$$gof(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x+۱})=(\sqrt{x+۱})^۲-۱=x+۱-۱=x$$

یعنی برای $x\geqslant -۱$ داریم $f^{-۱}(x)=x^۲-۱$. اگر f یک به یک نباشد، دارای وارون نیست. همچنین از آنجا که تابع g مورد بحث یک به یک نبوده و لذا دارای وارون نیست، با محدود کردن دامنهٔ آن به $x\geqslant ۰$ می توان آنرا وارونپذیر ساخته و بنویسیم $g^{-۱}(x)=\sqrt{x+۱}$.

از لحاظ نمودار برای یافتن تابع وارون یک تابع کافیست انعکاس آنرا نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم که خط $y=x$ است، بدست آوریم. تقارن هر نقطهٔ (x,y) روی f نسبت به این نیمساز نقطهٔ (y,x) را روی نمودار $f^{-۱}$ مشخص می کند.

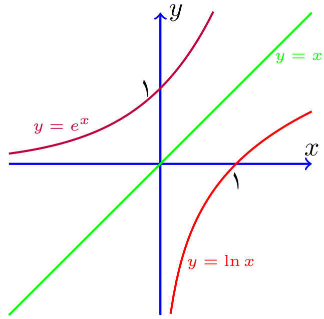


شکل ۱۵.۷: تابع فرضی که انعکاس آن نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم، تابع وارون آن را می سازد.

مثال ۲.۱۰.۷. وارون تابع $f(x)=\dfrac{۴x+۱}{x-۳}$ را بیابید.

حل. باتغییر نقش x و y می‌نویسیم $x=\dfrac{۴y+۱}{y-۳}$. با طرفین-وسطین $xy-۳x=۴y+۱$ و $xy-۴y=۳x+۱$ و با بدست آوردن y داریم $y=\dfrac{۱+۳x}{x-۴}$ بنابراین $f^{-۱}(x)=\dfrac{۱+۳x}{x-۴}$. ■

شبیه به این نیز، مثالی است از بدست آوردن تابع وارون که در خلال مثال۹.۲.۵ گذشت. طبق تعریف تابع وارون $f(f^{-۱}(x))=x$ و $f^{-۱}(f(x))=x$ و برای ارتباط بین دامنه و برد تابع و وارون آن روابط $D_f=R_{f^{-۱}}$ و $R_f=D_{f^{-۱}}$ برقرار است. از معروفترین توابع وارونپذیر، که کاربرد زیادی دارند تابع نمائی $y=e^x$ و تابع وارون آن $y=\ln x$ است که در شکل۱۶.۷ نشان داده شده اند.



شکل ۱۶.۷: تابع نمائی و تابع وارون آن تابع لگاریتمی.

۳.۱۰.۷ توابع معکوس مثلثاتی

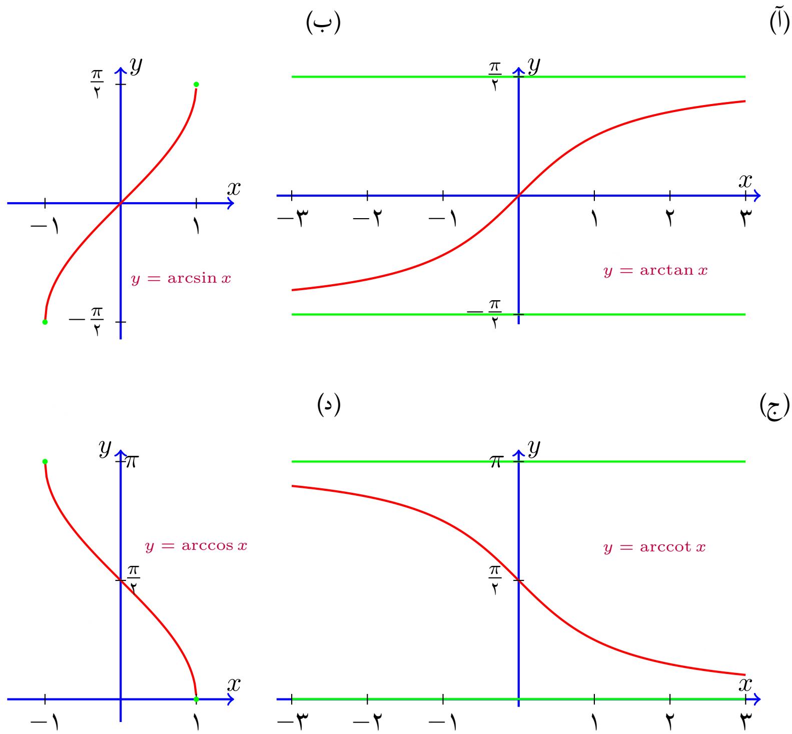
به عنوان توابعی کاربردی، توابع مثلثاتی نیز در بازه‌ای که ۱–۱ باشند دارای وارون می باشند. وارون تابع $\sin x$ را با $\arcsin x$ یا $\sin^{-۱} x$ نشان داده [۱] و آن عبارت از زاویه‌ای است که سینوس آن x است. پس اگر $\sin\dfrac{\pi}{۶}=\dfrac{۱}{۲}$ باشد سپس $\arcsin\dfrac{۱}{۲}=\dfrac{\pi}{۶}$ و به همین ترتیب توابع $\cos x$، $\tan x$ و $\cot x$ دارای معکوسند. توابع وارون مثلثاتی مقادیر حقیقی را گرفته و زاویه را (بر حسب رادیان) در اختیار ما می گذارند. مثال های زیر را ببینید:

$$\arcsin ۱=\frac{\pi}{۲}\ ,\ \arccos\frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{۳}\ ,\ \arctan ۱=\frac{\pi}{۴}\ ,\ \operatorname{arccot}\sqrt{۳}=\frac{\pi}{۶}$$

تابع $\sin x$ تنها در فاصلهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ یک به یک است و بنابراین وارون آن $\arcsin x$ تنها در این فاصله تعریف شده است. به همین ترتیب تابع وارون $\cos x$ را با $\arccos x$ نشان داده و چون $y=\cos x$ تنها در فاصلهٔ $[۰,\pi]$ یک به یک است، بنابراین تنها در این فاصله وارون دارد. تابع وارون $\tan x$ را با $\arctan x$ نشان داده که در فاصله $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ تعریف می گردد و تابع وارون $\cot x$ را با $\operatorname{arccot} x$ نشان می دهیم که در فاصلهٔ $[۰,\pi]$ تعریف می شود. $\arcsin$ و $\arctan$ صعودی و دوتای دیگر نزولی اند.

[۱] ما در این کتاب برای معکوس مثلثاتی از پیشوند arc استفاده می کنیم.

$y=f(x)$	D_y	R_y	
$y=\arcsin x$	$-۱ \leqslant x \leqslant ۱$	$-\frac{\pi}{۲} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{۲}$	
$y=\arccos x$	$-۱ \leqslant x \leqslant ۱$	$۰ \leqslant y \leqslant \pi$	
$y=\arctan x$	$x \in \mathbb{R}$	$-\frac{\pi}{۲} < y < \frac{\pi}{۲}$	
$y=\text{arccot}\, x$	$x \in \mathbb{R}$	$۰ < y < \pi$	
$y=\text{arcsec}\, x$	$\lvert x\rvert \geqslant ۱$	$۰ \leqslant y \leqslant \pi$	$(y \neq \frac{\pi}{۲})$
$y=\text{arccsc}\, x$	$\lvert x\rvert \geqslant ۱$	$-\frac{\pi}{۲} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{۲}$	$(y \neq ۰)$



شکل ۱۷.۷: نمودار توابع وارون مثلثاتی در فواصل تعریف شده.

طبق تعریف تابع وارون $f(f^{-۱}(x)) = x$ و $f^{-۱}(f(x)) = x$ که این خاصیت برای توابع مثلثاتی و معکوس آنها نیز برقرار است. مثلاً

$$\arcsin(\sin x) = x \quad , \quad \sin(\arcsin x) = x$$

مثال ۳.۱۰.۷. ثابت کنید برای $x<0$

$$\arctan x = -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}$$

حل. ثابت می کنیم که $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ و برای اینکار با فرض $a = \arctan x$ و $b = \arctan\frac{1}{x}$ از فرمول تانژانت مجموع زوایا می نویسیم:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\tan b} = \frac{\tan(\arctan x) + \tan(\arctan\frac{1}{x})}{1-\tan(\arctan x)\tan(\arctan\frac{1}{x})} = \frac{x+\frac{1}{x}}{1-x\frac{1}{x}} = -\infty$$

زیرا $x<0$. پس $a+b = -\frac{\pi}{2}$ که با جایگذاری فرضیات، مطلوب بدست می آید. ■

تمرین ۱۱.۷. .

۱. کدامیک از توابع زیر روی دامنهٔ شان یک به یکند؟

$$\begin{array}{llllll}
(a) & y=3x+1 & ,(b) & h(x)=x^3-1 & ,(c) & y=2x^2+5 \\
(d) & f(x)=(x+5)^2 & ,(e) & f(x)=\sqrt{1-x^2} & ,(f) & y=\sqrt[3]{2-3x} \\
(g) & y=\frac{1}{x} & ,(h) & y=\frac{2x-1}{3x+4} & ,(i) & g(x)=\ln|x|
\end{array}$$

۲. آیا دو تابع $f(x)=\frac{1}{1+x}$ و $h(x)=\frac{1-x}{x}$ وارون یکدیگرند؟

۳. وارون توابع زیر را بدست آورید.

$$\begin{array}{llllll}
(a) & y=2-5x & ,(b) & y=e^{3x}+2 & ,(c) & y=\sqrt{2x^2-1}+7 \\
(d) & g(x)=\frac{1}{x} & ,(e) & f(x)=\frac{2-x}{2x+3} & ,(f) & h(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \\
(g) & g(x)=\frac{1}{2\sqrt[3]{x}-1} & ,(h) & f(x)=\sqrt[3]{e^{0.5x}-1} & ,(i) & y=\frac{\sin x+1}{\sin x-1}
\end{array}$$

۴. مقادیر عبارات مثلثاتی زیر را بیابید.

$$\begin{array}{llllll}
(a) & \arccos ۱ & ,\ (b) & \arcsin -۱ & ,\ (c) & \arcsin \frac{۱}{۲} \\
(d) & \arcsin \frac{\sqrt{۲}}{۲} & ,\ (e) & \arcsin -\frac{\sqrt{۲}}{۲} & ,\ (f) & \cos(\arcsin \frac{۱}{۲} + \arccos ۰) \\
(g) & \arctan(+\infty) & ,\ (h) & \arccos \frac{\sqrt{۳}}{۲} & ,\ (i) & \cos(\arccos \frac{۱}{۲}) \\
(j) & \arccos(\cos \frac{۶}{۵}\pi) & ,\ (k) & \cot(\arctan ۱) & ,\ (\ell) & \arctan ۲ + \arctan ۰/۵ \\
(m) & \operatorname{arccot} \tan ۲ & ,\ (n) & \operatorname{arccot} -\infty & ,\ (o) & \arccos(\sin \frac{\pi}{۳}) \\
(p) & \sec(\arcsin \frac{-۱}{۲}) & ,\ (q) & \cos(\arcsin \frac{۱}{۲}) & ,\ (r) & \sin(\arcsin \frac{۳}{۴} - \arccos \frac{۳}{۴}) \\
(s) & \sin(۲ \arcsin \frac{۳}{۵}) & ,\ (t) & \cot \arctan ۰ & ,\ (u) & \arctan ۱ + \arctan \frac{۱}{۵}
\end{array}$$

۵. ثابت کنید $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{۲}$.

۶. نمودار توابع $\operatorname{arcsec} x$ و $\operatorname{arccsc} x$ را رسم نموده، دامنه و برد آنها را نیز تعیین نمائید.

۱۲.۷ توابع پارامتری

توابع پارامتری - که در برخی مباحث علمی کمک زیادی به تسهیل و فهم مطالب می نمایند- توابع خاص و مجزائی از توابع قبلی نیستند. هر تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^۲$ که یک مقدار مستقل را به دو مقدار می برد، یک تابع پارامتری نامیده می شود یعنی تابعی با ضابطه $f(t) = (x, y)$ که x و y هر کدام تابعی حقیقی بر حسب t هستند. چون استعمال این گونه توابع در فیزیک بیشتر رایج است، لذا متغیر مستقل را معمولاً t (زمان) فرض می کنند. ما نیز به تبعیت این کار را انجام داده و تابع پارامتری با دو متغیر وابسته x و y شکل زیر را بخود می گیرد:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^۲ \\ f(t) = \big(x(t), y(t)\big) \end{cases}$$

که $x(t)$ و $y(t)$ توابعی حقیقی اند و $D_f \subseteq D_x \cap D_y$. برای مثال تابع

$$f(t) = (t^۳ + ۱, ۳t - ۱)$$

یک تابع پارامتری است. بازای $t = ۱$ نقطهٔ $f(۱) = (۲, ۲)$ مشخص کنندهٔ موقعیت تابع (مثلاً یک ذره) در صفحهٔ مختصات است. در بعضی موارد می توان از شکل پارامتری یک تابع، شکل صریح یا ضمنی تابع را بدست آورد و برای اینکار باید پارامتر t را بین توابع $x(t)$ و $y(t)$ حذف نمود.

مثال ۱.۱۲.۷. تابع پارامتری $\begin{cases} x &= ۲t \\ y &= ۸t^۲ - ۱ \end{cases}$ داده شده است. با حذف پارامتر t در معادلات، شکل صریح یا ضمنی تابع را بنویسید.

حل. چون $x = ۲t$ پس $t = \frac{x}{۲}$ با جایگذاری در معادله دوم داریم $y = ۸(\frac{x}{۲})^۲ - ۱$ که جواب، سهمی $y = ۲x^۲ - ۱$ است. ■

مثال ۲.۱۲.۷. با حذف پارامتر در تابع پارامتری $f(t) = (\sin t - ۲, ۲\cos t + ۱)$ آنرا بشکل صریح یا ضمنی بنویسید $(\circ \leqslant t < \pi)$.

حل. از $\begin{cases} x = & \sin t - ۲ \\ y = & ۲\cos t + ۱ \end{cases}$ داریم $x + ۲ = \sin t$ و $\cos t = \frac{y-۱}{۲}$ که با توان رساندن و جمع طرفین، تابع ضمنی $۱ = (x+۲)^۲ + \frac{(y-۱)^۲}{۴}$ بدست می آید. ■

هر تابع صریح $y = f(x)$ را می توان بشکل پارامتری نوشت که ما این عمل را پارامتری‌سازی نامیم. برای این تابع می توان پارامتری‌سازی های گوناگونی را عنوان نمود که به ساده ترین شکل آنرا بصورت $\begin{cases} x & = t \\ y & = f(t) \end{cases}$ می توان آورد. برای پارامتری سازی بهتر یک تابع، آنرا از حالت پیچیده خارج و بشکل ملموستری می نویسیم مثلاً سعی می کنیم رادیکالها را با توان حذف کنیم. به مثال های زیر توجه کنید:

$$y = x^۳ \Longrightarrow \begin{cases} x & = t \\ y & = t^۳ \end{cases} \Longrightarrow f(t) = (t, t^۳)$$

$$y = \frac{x^۲}{۴} - ۱ \Longrightarrow \begin{cases} x & = ۲t \\ y & = t^۲ - ۱ \end{cases} \Longrightarrow f(t) = (۲t, t^۲ - ۱)$$

$$y = \sqrt{x} + ۲ \Longrightarrow \begin{cases} x & = t^۲ \\ y & = t + ۲ \end{cases} \Longrightarrow f(t) = (t^۲, t + ۲)$$

$$y = (x+۳)^۴ \Longrightarrow \begin{cases} x & = t - ۳ \\ y & = t^۴ \end{cases} \Longrightarrow f(t) = (t - ۳, t^۴)$$

پارامتری سازی در واقع پیمایش لحظه‌ای منحنی است و پارامتری سازی های گوناگون مسیر یک ذره، چیزی جز تغییر پیمایش روی منحنی مسیر نیست.

(فیزیک) در فیزیک مکان یا موضع یک ذره را بصورت تابعی پارامتری نشان می دهند. مکان $t = \circ$ مکان اولیهٔ ذره محسوب شده و $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ موقعیت ذره را در هر لحظهٔ $t(s)$ مشخص می کند. اگر ذره ای در امتداد مسیری روی صفحه از نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ حرکت کند و به نقطهٔ $B(x_۲, y_۲)$ برسد، جابجائی مستقیم الخطی به اندازهٔ

$$|AB| = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

داشته است. بدین ترتیب سرعت متوسط ذره ای که جابجائی مستقیم الخط $|AB|$ متر را در زمان t ثانیه طی نموده برابر $\overline{v} = \frac{|AB|}{t}$ (متر بر ثانیه) معرفی می شود.

مثال ۳.۱۲.۷. مکان ذره‌ای با تابع پارامتری $f(t) = (۲t^۲ + ۱, ۳t)$ مشخص شده است. مکان اولیهٔ ذره و نیز مکان آنرا در لحظهٔ $t = ۱/۵s$ بیابید.

حل. مکان اولیهٔ ذره $f(\circ) = (۱, \circ)$ و در لحظهٔ $t = ۱/۵s$ در نقطهٔ $f(۱/۵) = (۵/۵, ۴/۵)$ واقع است. ■

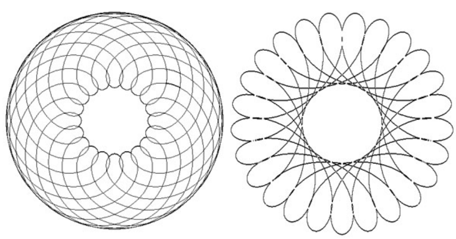
مثال ۴.۱۲.۷. موقعیت ذره‌ای در صفحه بشکل تابع پارامتری $f(t) = (t^۲ - ۱, ۲t + ۱)$ است. مکان ذره را در لحظات $t = ۲s, ۳s, ۴s$ پیدا کنید. سرعت متوسط ذره از $۲s$ تا $۴s$ چقدر است؟

حل.

$$
\begin{aligned}
f(2) &= (2^2-1, 2(2)+1) = (3,5) \quad \text{مکان ذره در ثانیه دوم} \\
f(3) &= (8,7) \quad \text{مکان ذره در ثانیه سوم} \\
f(4) &= (15,9) \quad \text{مکان ذره در ثانیه چهارم} \\
|f(4)-f(2)| &= \sqrt{(15-3)^2+(9-5)^2}\ \mathrm{m} \\
&= \sqrt{160}\ \mathrm{m} \quad \text{جابجایی ذره طی دو ثانیه} \\
\overline{v} &= \frac{\sqrt{160}}{2} = 6/3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

■

(معماری) از مهمترین منحنی های پارامتری، منحنی‌های بزیه[۲] هستند [۳] که در طراحی اشکال مختلف، نمادهای گوناگون و حتی در طراحی تولیدات صنعتی بخصوص خودرو بکار گرفته می شوند [۴]. در پروژه های آزمایشگاهی و طراحی های هدفمند سیستمی [۵] نیز برای ایجاد قوس در خطوط از خواص منحنی های بزیه کمک گرفته می شود.



شکل ۱۸.۷: اشکالی که بر اساس طرح های بزیه و با نرم افزار BezierDraw رسم شده‌اند.

یک منحنی بزیه درجه دو که توسط سه نقطهٔ مجزای $P_0(x_0,y_0)$ و $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ (بترتیب) معرفی می شود با معادلات پارامتری زیر بیان می گردد:

$$
\begin{cases}
x(t) = x_0(1-t)^2 + 2x_1t(1-t) + x_2t^2 \\
y(t) = y_0(1-t)^2 + 2y_1t(1-t) + y_2t^2
\end{cases}
,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1
$$

منحنی بزیه درجه سه [۶] نیز با چهار نقطهٔ مجزای

$$
P_0(x_0,y_0)\,,\quad P_1(x_1,y_1)\,,\quad P_2(x_2,y_2)\,,\quad P_3(x_3,y_3)
$$

معرفی شده و دارای معادلات پارامتری زیر است:

$$
\begin{cases}
x(t) = x_0(1-t)^3 + 3x_1t(1-t)^2 + 3x_2t^2(1-t) + x_3t^3 \\
y(t) = y_0(1-t)^3 + 3y_1t(1-t)^2 + 3y_2t^2(1-t) + y_3t^3
\end{cases}
,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1
$$

[۲] Bezier Curves

[۳] به افتخار ریاضیدان فرانسوی پی‌یر بزیه Pierre Bézier (1910-1999) که در صنعت خودرو کارهای بسیار انجام داد.

[۴] https://en.wikipedia.org/wiki/Bezier_curve.

[۵] CAD

[۶] Cubic Bezier Curve

دقت کنید که $t=0$ نقطهٔ شروع P_0 و $t=1$ نقطهٔ انتهائی P_3 را مشخص می کند. ضرایب جملات ظاهر شده در معادلات بزیه همان ضرایب مثلث خیام ـ نیوتن هستند.

مثال ۵.۱۲.۷. با سه نقطهٔ $P_0(1,1)$، $P_1(2,3)$ و $P_2(3,3)$ یک منحنی بزیه درجه دو بسازید. نشان دهید که این منحنی از نقطهٔ P_1 عبور نمی کند.
حل. با استفاده از شکل پارامتری منحنی بزیه می نویسیم:

$$\begin{cases} x(t) = x_0(1-t)^2 + 2x_1t(1-t) + x_2t^2 \\ y(t) = y_0(1-t)^2 + 2y_1t(1-t) + y_2t^2 \end{cases} , \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

با جایگذاری نقاط $P_0(1,1)$، $P_1(2,3)$ و $P_2(3,3)$ داریم:

$$\begin{cases} x(t) = 1(1-t)^2 + 4t(1-t) + 3t^2 \\ y(t) = 1(1-t)^2 + 6t(1-t) + 3t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = 2t+1 \\ y(t) = -2t^2 + 4t + 1 \end{cases}$$

که $0 \leqslant t \leqslant 1$ است. با حذف پارامتر t بین معادلات، معادلهٔ بزیه درجه دو $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$ بدست آمده و شرط درستی محاسبات این است که نقاط انتهائی باید در آن صدق کنند. شکل این سهمی را می توانید براحتی رسم نموده و نقاط بزیه را روی آن مشخص نمائید. این منحنی از نقطهٔ میانی $P_1(2,3)$ عبور نمی کند زیرا بازای $x=2$ مقدار $y=2/5$ را مشخص می کند. ■

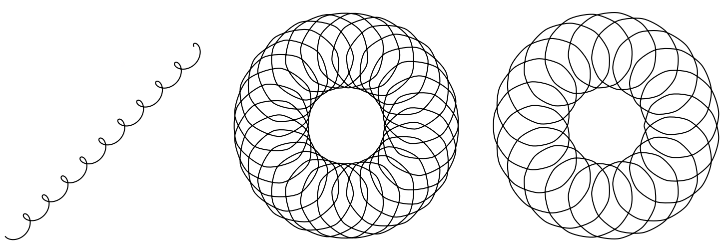
در شکل۱۹.۷ منحنی های بزیه

$$(a) \quad \begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 20t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 20t \end{cases} , \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

و

$$(b) \quad \begin{cases} x(t) = t - 2\cos 2t \\ y(t) = t - 2\sin 2t \end{cases} , \quad -2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$$

را ملاحظه می نمائید که با نرم افزار متمتیکا رسم شده اند.



شکل ۱۹.۷: منحنی پارامتری بزیه

منحنی های بزیه همچنین در تعیین اشکال و حروف و دیگر نمادها در برخی پرینترهای لیزری نیز بکار می روند. در نرم افزار نقاشی [7] ویندوز از روش بزیه برای رسم منحنی ها استفاده می‌شود.

[7] Paint

تمرین ۱۳.۷. تمرینات تکمیلی.

۱. با استفاده از نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ (شکل ۹.۷) و نیمساز ناحیه اول و سوم نمودارهای زیر را رسم کنید.

$$y=x+\frac{1}{x}\ ,\ y=|x|+\frac{1}{|x|}\ ,\ y=x+1-\frac{1}{x-2}\ ,\ y=-x+\frac{1}{x}$$

۲. با استفاده از نمودار $y=\ln x$ (شکل ۱۳.۵) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$y=\ln|x|\ ,\ y=|\ln x|\ ,\ y=\ln|x+1|\ ,\ y=2\ln x+1\ ,\ y=\big|\ln|x|\big|$$

۳. اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $g(x)=4\sqrt{2x-3}$ تابع gof و دامنه آن D_{gof} را بیابید.

۴. اگر $f(x)=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ و $g(x)=\tan x$ باشند، تابع fog و D_{fog} را مشخص کنید.

۵. اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sin x$ مقادیر fog، D_{fog}، gog و D_{gog} را حساب کنید.

۶. اگر

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\geqslant 1\\ 1-x^2 & ,x<1\end{cases}$$

و

$$g(x)=\begin{cases} -x & ,x\geqslant 0\\ \sqrt{-x} & ,x<0\end{cases}$$

مطلوبست محاسبهٔ توابع gof و fog.

۷. می دانیم در حالت کلی $fog(x)\neq gof(x)$.
الف) دو تابع f و g مثال بزنید که $fog(x)\neq gof(x)$.
ب) دو تابع f و g مثال بزنید که $fog(x)=gof(x)$.

۸. اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ مطلوبست مقادیر $fff(4)$، $ffff(4)$ و $ffff(x)$.

۹. اگر $f(x)=\frac{x}{x+1}$ مقادیر $fff(1)$ و $ffff(1)$ چیست.

۱۰. با استفاده از ترکیب توابع، ضابطهٔ توابع زیر را ساده کرده و نمودار آنها را رسم نمائید.

$$f(x)=\operatorname{sgn}(u(x))\quad ,\quad g(x)=u(\operatorname{sgn}(x))\quad ,\quad h(x)=u(\operatorname{sgn}(x)+x)$$
$$i(x)=u(|\operatorname{sgn}(x)|)\quad ,\quad j(x)=x\operatorname{sgn}(x^2-1)\ ,\quad k(x)=\operatorname{sgn}(x+1)+\operatorname{sgn}(x-1)$$

۱۱. نشان دهید $f(x)=x^3-1$ تابعی صعودی است.

۱۲. صعودی و یا نزولی بودن توابع زیر را مشخص نمائید.

$$(a)\quad y=\frac{۱}{x^{۳}}\quad,\ (b)\quad y=۱-|x|\quad,\ (c)\quad y=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$$
$$(d)\quad y=\ln x+۴\quad,\ (e)\quad y=\frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x}}\quad,\ (f)\quad y=\arcsin x$$

۱۳. بازه هائی را بیابید که تابع $y=x^{۲}-۵x+۶$ بر آنها صعودی یا نزولی است.

۱۴. تابع لگاریتم تابعی است زوج یا فرد؟ صعودی است یا نزولی.

۱۵. زوج و فرد بودن توابع زیر را تعیین کنید.

$$(a)\quad f(x)=۲|x|+۳\quad,\ (b)\quad f(x)=\big||x|-۱\big|\quad,\ (c)\quad f(x)=x^{۲}-۳$$
$$(d)\quad f(x)=\operatorname{sgn}(x)\quad,\ (e)\quad f(x)=x^{۴}+x+۱\quad,\ (f)\quad f(x)=u(x)-u(-x)$$
$$(g)\quad f(x)=\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}-۱}\quad,\ (h)\quad f(x)=۳\sqrt{|x|+۱}\quad,\ (i)\quad f(x)=x|x|-\sqrt[۳]{x}$$

۱۶. دوره تناوب توابع زیر را مشخص نمائید.

$$y=\sin ۴x\ ,\ y=\cos ۳x\ ,\ y=۲x-[۲x]\ ,\ y=|\sin x|\ ,\ y=\Big[|\sin x|\Big]$$

$$f(x)=\sin ۴x\ ,\ g(x)=\cos ۳x\ ,\ h(x)=۲x-[۲x]\ ,\ s(x)=|\sin x|\ ,\ t(x)=\Big[|\sin x|\Big]$$

۱۷. کران توابع زیر را تعیین کنید.

$$y=۳\sin x+۱\ ,\ y=\cos^{۲}x\ ,\ y=x^{۲}-۲x-۳\ ,\ y=۱-|x|\ ,\ y=\sqrt{\sin x}$$

۱۸. قرینهٔ نقطهٔ $A(۳,۵)$ نسبت به نقطهٔ $M(۴,-۲)$ چیست؟

۱۹. قرینهٔ تابع $y=۳x^{۳}-۵x+۲$ را نسبت به نقطهٔ $(-۱,۲)$ بیابید.

۲۰. مرکز تقارن تابع $y=x^{۳}-۲۷x+۳$ را پیدا کنید.

۲۱. قرینه تابع $y=\sin x+x\cos x$ را نسبت به مبداء مختصات بیابید.

۲۲. نشان دهید نقطه (α,β) مرکز تقارن مربع $|x-\alpha|+|y-\beta|=k$ است $(k>۰)$.

۲۳. نشان دهید نقطه $(\frac{b}{a},\frac{d}{c})$ مرکز تقارن مربع $|ax-b|+|cx-d|=k$ است $(k>۰)$.

۲۴. نشان دهید مبداء مختصات مرکز تقارن نمودار $|y|=|x|+|x+a|+|x-a|$ است.

۲۵. مقادیر a و b و c را چنان بیابید که نمودار $y=\sqrt[۳]{x^{۳}+ax^{۲}+bx+c}$ نسبت به مبداء مختصات متقارن باشد.

۲۶. بررسی کنید که آیا توابع $f(x)=x^{۳}+۲$ و $g(x)=x^{۲}-۱$ یک به یک هستند یا نه.

۲۷. وارون توابع زیر را در فاصله‌ای که یک به یک هستند بدست آورید.

$$(a)\quad y=\frac{۲-x}{۲x+۳}\quad ,\ (b)\quad y=\sqrt{۲x^۲-۱}+۷\quad ,\ (c)\quad y=\frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x}}$$
$$(d)\quad y=x^۲+۴x-۱\quad ,\ (e)\quad y=۳\ln x+۵\quad ,\ (f)\quad y=\frac{e^x-۱}{e^x+۱}$$

۲۸. ثابت کنید:

$$(a)\quad \arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{۲}\quad ,(b)\quad \arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{۲}$$
$$(c)\quad \arctan ۲+\arctan ۳=\frac{۳\pi}{۴}\quad ,(d)\quad ۲\arctan x+\arcsin\frac{۲x}{۱+x^۲}=\pi\quad (x>۱)$$
$$(e)\quad \arcsin\frac{۵}{۱۳}+۲\arctan\frac{۲}{۳}=\frac{\pi}{۲},(f)\quad \sin(\frac{۱}{۲}\arcsin x)=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x})$$

۲۹. اگر $f(x)=\frac{۴-x}{۲x-۴}$ ثابت کنید که $f(۳+x)f(۳-x)$ مقداری است ثابت.

۳۰. اگر $f(\frac{۱}{x})+۲f(x)=۲x+۱$ باشد، مطلوبست محاسبهٔ $f(x)$.

۳۱. اگر $f(x-۱)+۲f(۱-x)=۱-x$ باشد، تابع $f(x)$ را بیابید.

۳۲. سهمی $y=f(x)$ را چنان بیابید که $f(x+۱)-f(x)=۲x+۳$ بوده و نمودار سهمی از مبداء مختصات بگذرد.

۳۳. اگر $f(x)=x+\frac{۱}{x}$ نشان دهید $f(x^۳)+۳f(x)=\big(f(x)\big)^۳$.

۳۴. اگر $x=\arcsin(\sqrt{۳}\cos x)$ و انتهای کمان در ربع سوم باشد مطلوبست نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ x.

۳۵. معادلات زیر را حل نمائید.

$$(a)\quad \log_{\cos x}^{\sin x}+\log_{\sin x}^{\cos x}=۲\quad ,\ (b)\quad (x-۴)^۴+(x-۵)^۴=۱$$
$$(c)\quad \arcsin x=\arccos ۲x\quad ,\ (d)\quad \arcsin x+\arccos(۲x-۱)=\frac{\pi}{۲}$$

۳۶. دستگاههای زیر را حل کنید.

$$(a)\ \begin{cases}|y-۱|-x=۵,\\ |x-۵|+|y-۱|=۱.\end{cases}\quad ,\ (b)\ \begin{cases}۲x-|y|-۷=۰,\\ ۳|x|+۵y+۹=۰.\end{cases}$$
$$(c)\ \begin{cases}\log_۲^x-\log_۴^y=۳,\\ \log_۴^x-\log_۸^y=۱.\end{cases}\quad ,\ (d)\ \begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=۲\sqrt{xy},\\ x+y=۲۰.\end{cases}$$
$$(e)\ \begin{cases}\ln x-\ln y=۱\\ ۲x-y=۲e-۱.\end{cases}\quad ,\ (f)\ \begin{cases}\ln x-\ln y=۲\\ ۴x-y=۲e-۱.\end{cases}$$

۳۷. معادلهٔ $(۴\sin a)x^{۲} + ۴(\cos a)x + \sin a = ۰$ بازای چه aهایی ریشه مضاعف دارد؟

۳۸. توابع زیر را بشکل معادلات پارامتری (با پارامتر t) بنویسید.

$$
\begin{array}{llllll}
(a) & \sqrt{y} = \sqrt{x} - ۱ & ,\ (b) & y = \sqrt[۴]{x+۱} + ۱ & ,\ (c) & x^{۲} + ۹y^{۲} = ۹ \\
(d) & y = \sqrt{\ln x} & ,\ (e) & y = e^{\sqrt{x+۲}} & ,\ (f) & x^{۲} + y^{۲} = ۱۶ \\
(g) & \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy} & ,\ (h) & y = ۲\ln(x-۱) & ,\ (i) & y = \sin(\arcsin x)
\end{array}
$$

۳۹. در معادلات پارامتری زیر با حذف پارامتر t، معادلهٔ منحنی حاصل را بیابید. شکل حاصل را نیز رسم کنید.

$$
\begin{array}{ll}
(a) & f(t) = (۲t, \sqrt{t}),\ ۰ \leqslant t \leqslant ۱ \\
(b) & f(t) = (\cos t, \sin t),\ ۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi \\
(c) & f(t) = (t^{۲}, t^{۲}),\ ۰ \leqslant t \leqslant ۱ \\
(d) & f(t) = (۲\sin t, \cos t),\ -\pi \leqslant t \leqslant \pi \\
(e) & f(t) = (\sin t, ۲\cos^{۲} t),\ ۰ \leqslant t \leqslant \pi \\
(f) & f(t) = (۳\sin t, ۴\cos t),\ ۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi \\
(g) & \begin{cases} x = \sin ۲t \\ y = \cos t \end{cases} ;\ ۰ \leqslant t < \dfrac{\pi}{۲} \\
(h) & \begin{cases} x = ۱ + ۲\sin t \\ y = ۲ - ۲\cos t \end{cases} ,\ ۰ \leqslant t < \dfrac{\pi}{۲} \\
(i) & \begin{cases} x = ۳^{t} + ۳^{-t} \\ y = ۳^{t} - ۳^{-t} \end{cases} ,\ t \in \mathbb{R} \\
(j) & \begin{cases} x = \dfrac{۲t}{۱+t^{۲}} \\ y = \dfrac{۱-t^{۲}}{۱+t^{۲}} \end{cases} ,\ t \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

۴۰. (فیزیک) توابع $\begin{cases} x(t) = ۲t, \\ y(t) = t - ۱. \end{cases}$ و $\begin{cases} x(t) = t - ۱, \\ y(t) = \sqrt{t}. \end{cases}$ معادلات پارامتری مسیر دو ذره در صفحهٔ مختصات هستند. موقعیت ذرات را در لحظات ۲ s و ۴ s پیدا کنید. این ذرات کی و کجا بهم برخورد می کنند؟

۴۱. (فیزیک) تابع $f(t) = (t+۱, \sqrt{t+۴})$ مسیر پارامتری یک ذره در صفحهٔ مختصات است. برای مسیر این ذره معادله ای صریح بنویسید. موقعیت این ذره را در زمانهای $t = ۰$ s و $t = ۵$ s پیدا کنید. سرعت متوسط این ذره را طی این پنج ثانیه محاسبه نمائید.

۴۲. (معماری) برخی چاپگرهای لیزری با استفاده از منحنی های بزیه کاراکترهای دارای انحنا مانند حرف C را روی صفحه خروجی ایجاد می کنند. با اینکار حتی قادر به ایجاد اشکال پیچیده تری نیز خواهند بود. برای ایجاد کاراکتر C، با انتخاب مناسب چهار نقطه در صفحهٔ مختصات، منحنی بزیه درجه سهٔ حاصل را یافته و شکل مقبولی برای این کاراکتر بیابید. شکل منحنی بدست آمده را رسم کرده و نیز با رسم نقاط در نرم افزار نقاشی ویندوز و رسم منحنی روی آنها، نتیجهٔ خود را با این نرم افزار مقایسه نمائید.